

תוספת לתרגול 7

מדוע במימוש הרקורסיבי של binom mem באמצעות memoization זמן הריצה הוא $O(nk)$, כלומר פולינומיאלי ב- n, k ?

נסמן בטבלה את מספר הזוגות השונים של n, k עבורם יחושב $C(n, k) = \binom{n}{k}$. כל זוג עבורו מחושב $C(n, k)$ יסומן ב- $*$.

על מנת לחשב את $C(n, k)$ עלינו לחשב את $C(n-1, k-1)$ ואת $C(n-1, k)$. לשם כך הוספנו לכל תא שני חיצים שמובילים אליו משני התאים הרלוונטים שהערך בהם קובע את ערכו.

התאים הצבועים בצהוב הינם זוגות עבורם מתקיים תנאי הבסיס ולכן הפונקציה לא קוראת לעצמה רקורסיבית עבור ערכים אלו.

נשים לב שמספר התאים המסומנים בטבלה קטן מ kn (שזה גודל הטבלה) ולמעשה ניתן לחסום אותו בצורה הדוקה יותר ע"י שטח המקבילית שהוא: $(n-k+1)(k+1)$ (למעשה לא מחשבים את התא $((0,0))$).

שימו לב שבכל תא של המקבילית משקיעים $O(1)$ זמן, זאת מכיוון שבכל תא נבקר מספר קבוע של פעמים (למעשה לכל היותר פעמיים). ניתן לראות זאת בטבלה ע"י כך שמספר החיצים היוצאים מתא הינו לכל היותר 2, כלומר עבור התא המתאים לערך $\binom{i}{j}$ נזדקק לערך $\binom{i}{j}$ בדיוק פעמיים: פעם אחת כדי לחשב את $\binom{i+1}{j}$ ופעם נוספת כדי לחשב את $\binom{i+1}{j+1}$.

$k \setminus n$	0	1	2				k			n-k						n
0		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*					
1		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*					
2			*	*	*	*	*	*	*	*	*					
				*	*	*	*	*	*	*	*					
					*	*	*	*	*	*	*					
						*	*	*	*	*	*					
k							*	*	*	*	*					