הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\sqrt{2}^{n\log n} = O(n^{\sqrt{n/2}})$

ב. לכל קבוע $k > 1$ מתקיים $n(\log_2 n)^k = O(n(\log_{10} n)^k)$

ג. $\sum_{i=1}^{\log n} \frac{i}{2^n} = O(1)$

ד. $\log(n!) = O(n\log n)$

ה. $n + 2logn = O(n - \sqrt{n})$

נסו לפתור לבד.

הפתרון המפורט נמצא בעמוד הבא

פתרון:

א. הטענה $\sqrt{2}^{n\log n} = O(n^{\sqrt{n/2}})$ אינה נכונה.

נבין כיצד ניתן לראות זאת . ראשית עלינו לדאוג ששני הצדדים יראו "דומה" כדי שנוכל לקבל מושג ראשוני האם הטענה נכונה או לא.

נתחיל מהחלק השמאלי של המשוואה וננסה להביא אותו לצורה של הפונקציה שבתוך ה O().

נשתמש בחוקי חזקות ולוגריתם:

$$\sqrt{2}^{n\log n} = 2^{(0.5n\log n)} = 2^{\log n * 0.5n} = (2^{\log n})^{0.5n} = n^{0.5n}$$

כעת (אולי) ניתן כבר לראות שהטענה $\sqrt{2}^{n\log n} = n^{0.5n} = O(n^{\sqrt{\frac{n}{2}}})$ אינה נכונה.

נפריך באמצעות הוכחה בדרך השלילה.

נניח בשלילה כי מתקיים $n^{0.5n} = O(n^{\sqrt{\frac{n}{2}}})$, כלומר קיימים קבועים $c > 0, n_0 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $n^{0.5n} \leq c * n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$. נחלק את שני האגפים ב $n^{\sqrt{\frac{n}{2}}}$ ונקבל: $c \geq n^{\sqrt{\frac{n}{2}} * (\sqrt{\frac{n}{2}} - 1)}$.

זו כמובן סתירה כי c הינו קבוע והפונקציה $n^{\sqrt{\frac{n}{2}} * (\sqrt{\frac{n}{2}} - 1)}$ אינה חסומה.

כלומר, הוכחנו שהטענה המקורית אינה נכונה.

ב. הטענה: לכל קבוע $k > 1$ מתקיים $n(\log_2 n)^k = O(n(\log_{10} n)^k)$ נכונה.
נוכיח:
שוב נרצה לגרום לביטוי מצד שמאל של השוויון להראות "דומה" לביטוי מצד ימין. שוב נשתמש בחוקי לוגריתמים.

$$n(\log_2 n)^k = n\left(\frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2}\right)^k = \left(\frac{1}{\log_{10} 2}\right)^k n(\log_{10} n)^k$$

שימו לב ש k הינו קבוע. נבחר קבוע $c = \left(\frac{1}{\log_{10} 2}\right)^k$ ו-n_0 כלשהו (למשל $n_0 = 1$) ועבור קבועים אלה הטענה נכונה לכל $n > n_0$.
ולכן, לפי הגדרת O(), מתקיים כי $n(\log_2 n)^k = O(n(\log_{10} n)^k)$.

ג. הטענה: $\sum_{i=1}^{\log n} \frac{i}{2^n} = O(1)$ נכונה.
נוכיח:
שוב "נעבוד" על הביטוי מצד שמאל של השוויון. נשתמש כאן בסכום סדרה חשבונית (עם log n מחוברים).

$$\sum_{i=1}^{\log n} \frac{i}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{\log n} i = \frac{1}{2^n} * 0.5 * \log n * (\log n + 1) \leq \frac{1}{2^n} * 0.5 * \log n * (2\log n)$$

המעבר האחרון נכון בהכרח עבור $n > 2$ למשל.

כלומר עבור n>2:

$$\sum_{i=1}^{\log n} \frac{i}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} * (\log n)^2$$

נשים לב שהביטוי מצד ימין של אי השוויון יהיה קטן ממש מ-1 לכל n>=1. לכן בהכרח לכל n>2 מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{\log n} \frac{i}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} * (\log n)^2 < 1$$

נבחר c=1 ו- $n_0 = 2$ למשל (זיכרו שאנו מחפשים n_0 כזה שעבורו אי השוויון יהיה נכון) ועבורם לכל $n > n_0$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\log n} \frac{i}{2^n} < c * 1 = 1$$

לכן לפי הגדרת ()O הטענה נכונה.

ד. נראה שהטענה $\log(n!) = O(n \log n)$ נכונה.

$$\log(n!) = \log(n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1)$$

לפי חוקי לוגריתמים מתקיים:

$$\log(n!) = \log(n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1) = \log n + \log(n-1) + \log(n-2) + \dots + \log 1$$

ברור שמתקיים לכל $1 \leq i \leq n$ כי: $\log i \leq \log n$, לכן:

$$\log(n!) = \log(n) + \log(n-1) + \dots + \log 1 = \sum_{i=1}^{n} \log i \leq \sum_{i=1}^{n} \log n = n \log n$$

נבחר *c=1* ו- $n_0 = 2$ למשל ועבורם לכל $n > n_0$ מתקיים : $\log(n!) \leq c * nlogn = nlog\, n$

לכן, לפי הגדרת *O()* הטענה נכונה.

ה. הטענה נכונה:

$$n + 2logn \leq n + 2n = 3n \leq 3n + \left(n - 4\sqrt{n}\right) = 4(n - \sqrt{n})$$

אי השוויון הראשון מתקיים כאשר $logn \leq n$, כלומר $n > 0$, ואי השוויון השני כאשר $n - 4\sqrt{n} \geq 0$, כלומר עבור $\sqrt{n} \geq 4$, או $n \geq 16$. לכן הטענה נכונה עבור $c = 4$ לכל $n \geq 16$ (כלומר $n_0 = 16$).