בתרגיל הבא ננתח זמן ריצה של לולאות מקוננות.
נאמר שהלולאות בלתי תלויות אם מספר האיטרציות של הלולאה הפנימית לא תלוי בערך המשתנה שנקבע בלולאה החיצונית.

תרגיל:

נתחו את סיבוכיות הזמן של הלולאות הבאות:

a) for i in $range(1, n+1)$:

$\quad j = 1$

$\quad$ while $j <= n$:

$\quad\quad j += 1$

תשובה: $O(n^2)$, לולאות בלתי תלויות

תרגיל:
נתחו את סיבוכיות הזמן של הלולאות הבאות:

b) for i in $range(1, n+1)$:

$\quad j = 1$

$\quad$ while $j <= n$:

$\quad\quad j += 7$

תשובה: $O(n^2)$, לולאות בלתי תלויות

עבור כל ערך i של הלולאה החיצונית הלולאה הפנימית עושה $\frac{n}{7}$ איטרציות.

נוודא באמצעות טבלת מעקב כמה איטרציות תבצע הלולאה הפנימית עבור ערך i של הלולאה החיצונית

איטרציה	הערך של j אחרי איטרציה זו
0	1
1	$1+7$
2	$8+7=1+2\cdot 7$
3	$1+3\cdot 7$
k	$1+k\cdot 7$

ניתוח סיבוכיות

- נרצה לדעת מהו מספר האיטרציות הקטן ביותר k שבו הערך של j יהיה גדול ממש מ n, כלומר מהו k הקטן ביותר שמקיים:

$$1 + k \cdot 7 > n$$

$$k > (n-1)/7$$

כלומר לאחר $\frac{n-1}{7} + 1 = k$ איטרציות כבר לא נכנס ללולאה.

- האם זה הדוק? **כן!** נראה שעבור מספר קטן יותר של איטרציות j יהיה קטן או שווה ל n ולכן עדיין נכנס ללולאה.

אם $k \leq (n-1)/7$ אז $j = 1 + 7 \cdot k \leq n$.

- לכן, לכל i בלולאה החיצונית, הלולאה הפנימית תבצע בערך $n/7$ איטרציות. יש n ערכים שונים של i שנבדקים ולכן מספר האיטרציות הכולל הוא

$$n \cdot \frac{n}{7} = O(n^2)$$

תרגיל:

נתחו את הלולאות הבאות:

c) for i in $range(1, n+1)$:

$\quad j = 1$

$\quad$ while $j <= n$:

$\quad\quad j *= 2$

תשובה: $O(n \log n)$, לולאות בלתי תלויות

נוודא באמצעות טבלת מעקב כמה איטרציות תבצע הלולאה הפנימית עבור ערך i של הלולאה החיצונית

איטרציה	הערך של j אחרי איטרציה זו
0	1
1	2
2	$2 \cdot 2 = 2^2$
3	$2^2 \cdot 2 = 2^3$
k	2^k

ניתוח סיבוכיות

- אחרי k איטרציות $j = 2^k$ ולכן נרצה לדעת מהו ה-k הקטן ביותר שמקיים:

$$2^k \geq n$$
$$k \geq \log_2 n$$

- האם הדוק? כן! אם $k < \log_2 n$ אז $j = 2^k < n$
- לכן, לכל i בלולאה החיצונית, הלולאה הפנימית תבצע בערך $\log_2 n$ איטרציות. יש n ערכים שונים של i שנבדקים ולכן מספר האיטרציות הכולל הוא $n \cdot \log_2 n = O(n \log n)$

תרגיל:

נתחו את הלולאות הבאות:

d) for i in $range(1, n+1)$:

$j = 1$

while $j <= n$:

$j *= 7$

תשובה: $O(n \log n)$, לולאות בלתי תלויות

משתנה רק בסיס הלוג.

נוודא באמצעות טבלת מעקב כמה איטרציות תבצע הלולאה הפנימית עבור ערך i של הלולאה החיצונית

איטרציה	הערך של j אחרי איטרציה זו
0	1
1	7
2	7^2
3	7^3
k	7^k

ניתוח סיבוכיות

- הניתוח כמעט זהה למקרה הקודם. אחרי k איטרציות $j = 7^k$ ולכן נרצה לדעת מהו ה-k הקטן ביותר שמקיים:
$$7^k > n$$
$$k > \log_7 n$$
- האם הדוק? כן! אם $k \leq \log_7 n$ אז $j = 7^k \leq n$
- לכן, לכל i בלולאה החיצונית, הלולאה הפנימית תבצע בערך $\log_7 n$ איטרציות. יש n ערכים שונים של i שנבדקים ולכן מספר האיטרציות הכולל הוא $n \cdot \log_7 n = O(n \log n)$

תרגיל:
נתחו את הלולאות הבאות:

e) for i in $range(1, n+1)$:

    $j = 2$

    while $j <= n$:

        $j **= 2$

תשובה: $O(n \log\log n)$, לולאות בלתי תלויות

ניתן להוכיח באינדוקציה כי בשלב הk מתקיים ש $j = 2^{2^k}$ ועל ידי הוצאת log פעמיים נקבל את התשובה. כמובן שניתן להיעזר בטבלת מעקב...

נוודא באמצעות טבלת מעקב כמה איטרציות תבצע הלולאה הפנימית עבור ערך i של הלולאה החיצונית

איטרציה	הערך של j אחרי איטרציה זו
0	2
1	2^2
2	$(2^2)^2 = 2^{2\cdot 2}$
3	$(2^{2\cdot 2})^2 = 2^{2\cdot 2\cdot 2} = 2^{2^3}$
k	2^{2^k}

ניתוח סיבוכיות

- טענה: לאחר k איטרציות, $j = 2^{2^k}$.
- הוכחה: באינדוקציה. עבור $k = 0$ מתקיים $j = 2 = 2^{2^0}$
- נניח כי אחרי k איטרציות $j = 2^{2^k}$. באיטרציה ה-$k + 1$ אנחנו מעלים את j בריבוע ולכן כעת $j = \left(2^{2^k}\right)^2 = 2^{2 \cdot 2^k} = 2^{2^{k+1}}$

ניתוח סיבוכיות (המשך)

- נרצה לדעת מהו מספר האיטרציות הקטן ביותר k שבו הערך של j יהיה גדול ממש מ n, כלומר מהו k הקטן ביותר שמקיים: $2^{2^k} > n$. נוציא log משני האגפים ונקבל: $2^k > \log n$. נוציא שוב log ונקבל: $k > \log\log n$
- האם הדוק? כן! אם $k \leq \log\log n$ אזי $2^k \leq 2^{\log\log n} = \log n$ ולכן $j = 2^{2^k} \leq 2^{\log n} = n$
- לכן, לכל i בלולאה החיצונית, הלולאה הפנימית תבצע בערך $\log\log n$ איטרציות. יש n ערכים שונים של i שנבדקים ולכן מספר האיטרציות הכולל הוא $n \cdot \log\log n = O(n\log\log n)$

תרגיל:
נתחו את הלולאות הבאות:

f) for i in $range(1, n+1)$:

$\quad j = 1$

$\quad$ while $j <= n$:

$\quad\quad j += i$

תשובה: $O(n \log n)$, לולאות <u>תלויות</u>

לכל i נצטרך $\frac{n}{i}$ איטרציות ונקבל $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx n \log n$ (טור הרמוני). פירוט בשקף הבא.

מספר האיטרציות של הלולאה הפנימית לכל ערך של הלולאה החיצונית

$i =$	מספר איטרציות עליהן j רץ
1	n
2	$\frac{n}{2}$
3	$\frac{n}{3}$
k	$\frac{n}{k}$

ולכן סה"כ מספר האיטרציות הכולל הוא:

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx n \log n = O(n \log n)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מקירוב הטור ההרמוני באמצעות $\ln n$ שאותו אפשר להוכיח (למשל) ע"י הזהות $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$