סיבוכיות – סימון $O(.)$

- עבור שתי פונקציות $f(n),g(n)$ נאמר ש $f(n) = O(g(n))$ (לפעמים מסומן גם $f(n) \in O\big(g(n)\big)$ או $f = O(g)$) אם קיימים קבועים $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים :

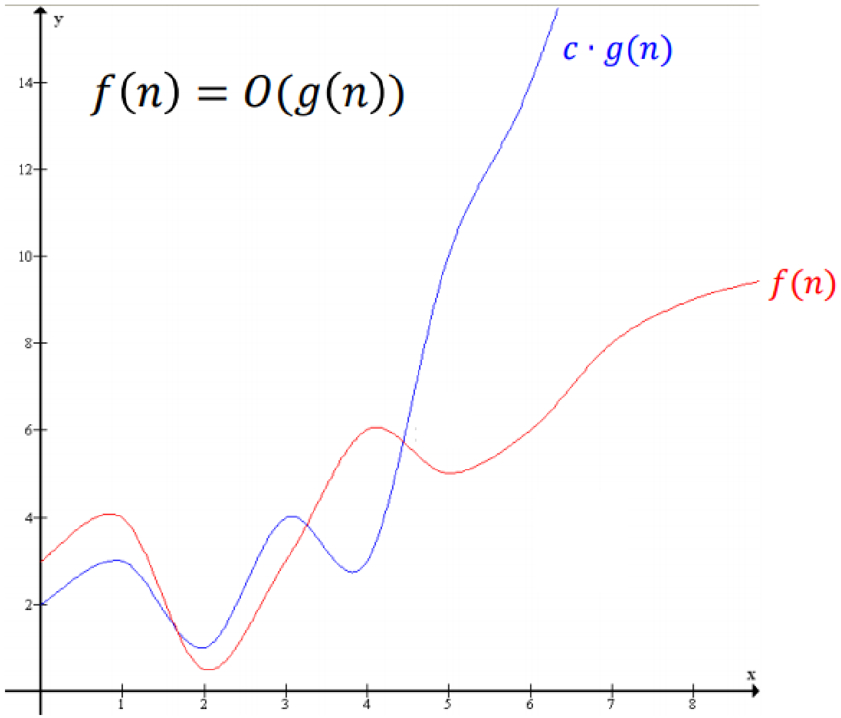
$$|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$$

- כאשר f,g חיוביות, באופן שקול:

$$f = O(g) \Leftrightarrow \limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

נתעניין בהתנהגות האסימפטוטית

Big O Notation – Visualized



א) הוכיחו או הפריכו: $2^n = O(2^{\mathrm{n}/2})$

נפריך. כדי להפריך נוח להניח בשלילה שהטענה נכונה ולהגיע לסתירה.

נניח בשלילה שמתקיים $2^n = O\left(2^{n/2}\right)$. כלומר קיימים קבועים $c > 0$,
$n_0 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים :

$$2^n \leq c \cdot 2^{n/2}$$
$$2^{n/2} \leq c$$

וזו סתירה, כי c קבוע שהנחנו שקיים, אבל $2^{n/2}$ אינה חסומה.

ב) הוכיחו או הפריכו: $\log(n!) = O(n\log n)$

נוכיח:

- הפונקציה $\log(\cdot)$ גדלה מונוטנית ומתקיים: $\log(a\cdot b) = \log a + \log b$.
- נפעיל איטרטיבית:

$$\log(n!) = \log(n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1) = \log n + \log(n-1) + \cdots + \log 1$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \log i \underbrace{\leq}_{???} \sum_{i=1}^{n} \log n = n\log n$$

- נקבע למשל את $c = 1, n_0 = 1$. ברור שלכל $n > n_0$ מתקיים : $\log(n!) \leq c\,n\log n$)

קבוע נשאר קבוע

- עובדה שימושית שנשתמש בה בהמשך התרגול – אם c קבוע אז **<u>לכל פונקציה</u>** f, הערך $f(c)$ הוא קבוע.
- הערך יכול להיות מאוד גדול: $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{c}}}}}$ - אבל הוא עדיין קבוע.

פעולות על פונקציות

- בהינתן שתי פונקציות f,g נגדיר:
  - $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
  - $\max\{f,g\}(x)=\max\{f(x),g(x)\}$
- בנוסף, אם $f(n)=O(g(n))$ לעתים נרשום בקיצור: $f=O(g)$

חיבור פונקציות

- נתון: $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2)$
- האם $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$?
- כן! נסמן את הקבועים שלנו ב-c_1, n_1, c_2, n_2:
- $\forall n > n_1: f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n)$
- $\forall n > n_2: f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2\,(n)$
- נגדיר: $c_3 = \max\{c_1, c_2\}, n_3 = \max\{n_1, n_2\}$
- $\forall n > n_3: (f_1 + f_2)(n) \leq c_1 \cdot g_1\,(n) + c_2 \cdot g_2\,(n) \leq c_3(g_1 + g_2)(n)$

מקסימום על פונקציות

- נתון: $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2)$
- האם $f_1 + f_2 = O(\max\{g_1, g_2\})$?
- כן! נסמן כמו מקודם את הקבועים שלנו ב-c_1, n_1, c_2, n_2:
- $\forall n > n_1 : f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n)$
- $\forall n > n_2 : f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2\,(n)$
- נגדיר: $c_3 = \max\{c_1, c_2\}, n_3 = \max\{n_1, n_2\}$
- $\forall n > n_3 : (f_1 + f_2)(n) \leq c_1 \cdot g_1\,(n) + c_2 \cdot g_2\,(n) \leq c_3(g_1 + g_2)(n)$
  $\leq 2 \cdot c_3 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} = 2 \cdot c_3 \cdot \max\{g_1, g_2\}(n)$

ניתן להרחיב את הטענה ל- k מחוברים, כאשר k קבוע

- ניתן להרחיב את הטענה ל k פונקציות $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)$, כאשר k הינו קבוע שלא תלוי ב n.
- תוצאה ישירה של ההרחבה היא הטענה הבאה.

פולינום מדרגה k

טענה: לכל קבוע $k \geq 1$ וקבועים $a_0,a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}^+$ מתקיים:
$$f(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + \cdots + a_k n^k = O\left(n^k\right)$$

הוכחה:

- נגדיר את $a_{max} = \max\{a_0,\dots,a_k\}$
- מתקיים: $f(n) \leq a_{max} n^0 + \cdots + a_{max} n^k \leq (k+1) \cdot a_{max} \cdot n^k$
- $(k+1) a_{max}$ הינו קבוע כנדרש.

- במילים: פולינום "נשלט" על ידי הדרגה הגבוהה ביותר שלו.

הוכיחו או הפריכו: אם $a,b > 1$ קבועים, $\log_a n = O(\log_b n)$

- זהות שימושית:

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$$

- הוכחת הזהות: נסמן $c = \log_a n$.

- $a^c = n \rightarrow b^{\mathrm{c} \cdot \log_b a} = n$
- $c \cdot \log_b a = \log_b n \rightarrow c = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

הוכיחו או הפריכו: אם $a,b > 1$ קבועים, $\log_a n = O(\log_b n)$

הטענה נכונה. נוכיח:

- מהזהות:

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$$

- כיוון ש-$a,b > 1$ וקבועים, המספר $\frac{1}{\log_b a}$ הוא קבוע חיובי
- לכן, בניתוח אסימפטוטי לרוב נשמיט בסיס ונאמר $O(\log n)$