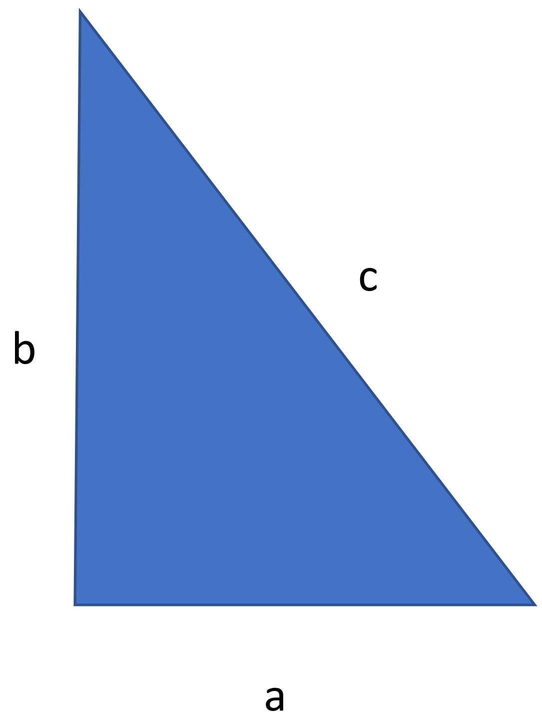
נפתור את השאלה הבאה:

- בהינתן מספר טבעי p, מהו מספר המשולשים ישרי הזווית בעלי היקף p ואורכי צלעות שלמים?



לדוגמא עבור p=12 נרצה לקחת בחשבון את המשולש :
a=3, b=4, c= 5

נמדל את השאלה כתוכנית (עם קלט ופלט)

- קלט: מספר שלם חיובי p
- נייצג משולש כשלשה (a,b,c)
- פלט: מספר השלשות שמקיימות :

א- $a,b,c > 0$ שלמים

ב- $a + b + c = p$

ג- $a^2 + b^2 = c^2$ (משפט פיתגורס)

כדי לא לספור משולש פעמיים (מבחינתנו (3,4,5) זהה ל (4,3,5)) נדרוש גם ש:

ד- $0 < a < b < c$

נמדל את השאלה כתוכנית (עם קלט ופלט) - המשך

- לא יתכן ש $a = b$, כי אז $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ אינו שלם
- הדרישה ש $b < c$ מיותרת , בהינתן דרישות א, ג.

לכן נרצה לספור את השלשות (a,b,c) שמקיימות:

א- $a,b,c > 0$ שלמים

ב- $a + b + c = p$

ג- $a^2 + b^2 = c^2$

ד- $a < b$

ננתח את סיבוכיות זמן הריצה של הפתרונות

- נתאר את סיבוכיות זמן הריצה כתלות בגודל הקלט. נשתמש בסימון O(.) כדי לתאר חסם עליון (נשאף שיהיה הדוק ככל האפשר) על סיבוכיות הזמן של הפונקציה.
- נגדיר (להיום) את גודל הקלט להיות הערך עצמו של המספר p.
- נתייחס לכל תוכן הלולאה הפנימית כאל "פעולה אטומית" שלוקחת זמן קבוע שאינו תלוי בגודל הקלט. נסמן זאת ב O(1)

סיבוכיות הזמן של v1

- הפונקציה עוברת על (p-2) ערכים של a, לכל ערך של a עוברת על (p-2) ערכים של b, ולכל זוג a,b עוברת על (p-2) ערכים של c. זהו מספר הפעמים שנבצע את תוכן הלולאה הפנימית.
- כלומר נבצע : $(p-2)^3$ איטרציות
- $(p-2)^3 \approx p^3 = O(p^3)$
- החסם הוא כתלות בגודל הקלט p

ומה אם נגדיר את גודל הקלט באופן שונה?

- קיבלנו קודם חסם של $O(p^3)$, כתלות בגודל הקלט שהוא הערך p עצמו.
- ננסה להגדיר את גודל הקלט בצורה שונה: גודל הקלט יהיה מספר הביטים n בייצוג הבינארי של p. מתקיים : $2^{n-1} \le p \le 2^n - 1$
- מתקיים $(p-2)^3 \le (2^n-3)^3 \approx (2^n)^3 = 2^{3n} = O(2^{3n})$
- כלומר עבור הגדרה שונה של גודל הקלט קיבלנו חסם שונה.
- שימו לב שניתן לעבור מחסם אחד לשני: מתקיים ש $n \approx \log_2 p$, ולכן אם נציב ערך זה ב $O(2^{3n})$ נקבל $O(p^3)$

סיבוכיות הזמן של v2

- הפונקציה עוברת על (p-2) ערכים של a, לכל ערך של a עוברת על (p-2) ערכים של b.
- כלומר נבצע : $(p-2)^2$ איטרציות
- $(p-2)^2 \approx p^2 = O(p^2)$

סיבוכיות הזמן של v3

- הפונקציה עוברת על (p-2) ערכים של a, לכל ערך של a עוברת על ערכי b שגדולים ממש ממנו וקטנים מ p.
- שימו לב: הלולאות כאן תלויות! מספר האיטרציות של הפנימית תלוי בערך a של החיצונית.
- הסכום הבא מייצג את כמות האיטרציות:

$$\underbrace{(p-3)}_{a=1}+\underbrace{(p-4)}_{a=2}+\cdots+\underbrace{0}_{a=p-2}=\sum_{a=1}^{p-2}p-(a+2)=\sum_{i=0}^{p-3}i=\frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

- מתקיים: $\frac{(p-2)(p-3)}{2}\approx\frac{p^2}{2}=O(p^2)$

סיכום ביניים

גירסה	~כמות איטרציות	חסם סיבוכיות זמן
v1	$(p-2)^3$	$O(p^3)$
v2	$(p-2)^2$	$O(p^2)$
v3	$p^2/2$	$O(p^2)$

לגירסאות v2, v3 ישנו אותו חסם על סיבוכיות הזמן, אבל ברור שגירסה v3 מבצעת פחות איטרציות בפועל ולכן אמורה להיות מהירה יותר. איך זה מסתדר?

החסם על סיבוכיות הזמן מתאר כיצד ישתנה זמן הריצה של פונקציה מסויימת אם נשנה את גודל הקלט שלה, ולא משמש להשוואה בין פונקציות שונות עבור קלט מסויים.

דוגמא

- נניח שאנחנו מריצים את v2, v3 על קלט p1. ומקבלים:

	v2	v3
זמן ריצה עבור קלט p1	X שניות	Y שניות

מתקיים $X > Y$ כי v3 מבצעת פחות איטרציות מאשר v2

- עבור קלט $p2 = 2 \cdot p1$ (קלט גדול פי 2) נקבל:

	v2	v3
זמן ריצה עבור קלט p2	$\sim 4X$ שניות	$\sim 4Y$ שניות

- בגלל שסיבוכיות הזמן כל אחת מהפונקציות היא $O(p^2)$, אם נגדיל את הקלט פי 2 זמן הריצה יגדל פי 4
- שימו לב: זמן הריצה של v3 יהיה קצר משל v2 עבור הקלט p2.

סיכום סיבוכיות זמן

גירסה	~כמות איטרציות	חסם סיבוכיות זמן
v1	$(p-2)^3$	$O(p^3)$
v2	$(p-2)^2$	$O(p^2)$
v3	$p^2/2$	$O(p^2)$
v4	$p/3$	$O(p)$